

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z = (a + 2i)^2 + (a - 2i)^2$ este real, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$. Arătați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{\frac{x+1}{2}} = 2 \cdot 2^x$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax + y - 5 = 0$, unde a este număr real și $x - 4y + 3 = 0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 2 \\ x + y = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Arătați că matricea $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A .
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1 \circ z_2 = iz_1 z_2 + z_1 + z_2$.
- 5p a) Arătați că $i \circ i = i$.
- 5p b) Demonstrați că $z_1 \circ z_2 = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p c) Demonstrați că simetricul numărului $\frac{1}{2}(1 + i)$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n - n \ln x + 1$, unde n este număr natural nenul.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = 0$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 12$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x} dx$.

5p c) Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)dx - 14\int_0^1 f^6(x)dx = 128$.